FÍSICA MÉDICA

Área de Ciências Naturais e Tecnológicas – Curso de Física Médica

# FSC121–Eletromagnetismo II

Turma 10 – 2° semestre de 2005 (15/dezembro)

Professor: Gilberto Orengo – orengo@unifra.br (http://www.casm.ufsm.br/orengo)

| NOME DO ALUNO: | NOTA: |
|---|---|

# PROVA ATRASADA GERAL

Valor: 10,0 – Peso: 1,0

Escolha as questões que se sinta mais seguro para responder. A única regra é que a nota total seja igual a dez (10), isto é, necessariamente deverá resolver cinco (5) questões.

1) (Valor: 2,0)[100%] Provar matematicamente que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0$, sendo o campo magnético dado por

$$\vec{\mathbf{B}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}\,')\times(\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}\,')}{|\vec{\mathbf{r}}-\vec{\mathbf{r}}\,'|^3}dV'\,,$$

em que $\vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{r}}\,')$ é a densidade de corrente.

2) (Valor: 2,0) Um próton não-relativístico de velocidade $\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{i}}$ penetra numa região em que há um campo magnético $\vec{\mathbf{B}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{B}_0(\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}})$ e um campo elétrico $\vec{\mathbf{E}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{E}_0(\hat{\mathbf{k}}-\hat{\mathbf{i}}+2\hat{\mathbf{j}})$. (**a**)[70%] Calcule a força de Lorentz que age sobre o próton e, (**b**)[30%] obtenha as suas equações de movimento. (Use $\vec{\mathcal{F}} = m\dfrac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$). Considere como origem o ponto em que o próton entra na região em que existem os campos.

3) (Valor: 2,0) Prove que não existe monopolo magnético, utilizando

$$\rho_M(\vec{\mathbf{r}}\,') \equiv -\boldsymbol{\nabla}'\cdot\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}\,') \qquad \text{e} \qquad \sigma_M(\vec{\mathbf{r}}\,') \equiv \vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}\,')\cdot\hat{\mathbf{n}}\,,$$

que são, respectivamente, densidade volumétrica do pólo magnético e densidade superficial da intensidade do pólo magnético, em que $\vec{\mathbf{M}}(\vec{\mathbf{r}}\,')$ é a magnetização.

4) (Valor: 2,0) Descreva, passo a passo, a curva de histerese, do princípio até o ciclo fechar.

5) (Valor: 2,0)(**a**)[40%] Escreva as Equações de Maxwell, na forma diferencial, e faça uma pequena dissertação a respeito de cada uma. (**b**)[30%] Encontre a forma integral de cada equação acima. (**c**)[30%] Qual a inconsistência que havia na equação da lei de Ampère e que Maxwell corrigiu? Escreva (*e somente escreva*) a correção feita por Maxwell.

6) (Valor: 2,0)(**b**)[60%] Mostre, partindo das equações de Maxwell, que as equações de onda para um meio linear são:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{H}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

e

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0 \quad (\text{para um meio que } \rho = 0)\,, \tag{2}$$

em que $\epsilon$ é a permissividade elétrica do meio, $\mu$ é a permeabilidade magnética do meio e $g$ é a condutividade elétrica do meio. (Identidade necessária: $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\cdot - \nabla^2$) (**b**)[40%] Considerando que a dependência temporal do campo elétrico seja dada por $e^{-i\omega t}$, a solução para essa equação de onda é

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}},t) = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})e^{-i\omega t}\,.$$

Use esta solução para obter a equação de onda que rege a variação espacial do campo elétrico.

7) (Valor: 2,0)(**a**)[50%] Usando as Equações de Maxwell para o caso que não há carga prescrita, nem distribuições de corrente no meio e ainda, que a condutividade é nula ($g = 0$), obtenha

$$
\begin{aligned}
K\vec{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \hat{\mathbf{E}} &= 0\,, \\
\vec{\boldsymbol{\kappa}} \cdot \hat{\mathbf{B}} &= 0\,, \\
\vec{\boldsymbol{\kappa}} \times \hat{\mathbf{E}} &= \omega\hat{\mathbf{B}}\,, \\
\vec{\boldsymbol{\kappa}} \times \hat{\mathbf{B}} &= -\frac{\omega}{c^2}K\hat{\mathbf{E}}\,,
\end{aligned}
$$

nas quais o acento circunflexo ($\hat{}$) indica vetor complexo, $\vec{\boldsymbol{\kappa}} = \kappa\hat{\mathbf{u}}$.(*Dica: para obter os operadores $\partial/\partial t$ e $\boldsymbol{\nabla}$ em função, respectivamente, de $\omega$ e $\vec{\boldsymbol{\kappa}}$, será necessário supor que $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \hat{\mathbf{E}}e^{-i(\omega t - \vec{\boldsymbol{\kappa}}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$. Ajuda: $\hat{\mathbf{D}} = \epsilon\hat{\mathbf{E}}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mu\hat{\mathbf{H}}$, $\epsilon = K\epsilon_0$ e $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.*)

(**b**)[50%] Use as equações acima (do item (**a**)) para demonstrar que a onda eletromagnética é ***transversal*** e, também, que $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ são perpendiculares entre si.

8) (Valor: 2,0)[100%] Demonstre que para uma onda eletromagnética plana no vácuo, a *impedância do espaço livre* é dado por:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}\,.$$

9) (Valor: 2,0) Em uma região do espaço, onde o meio é o vácuo, o vetor densidade de corrente de deslocamento é dado pela relação:

$$\vec{\mathbf{J}}_D = \mathrm{J}_0\cos[\omega t - \kappa z]\hat{\mathbf{i}}$$

em que $\omega$ e $\kappa$ são constantes. (**a**)[40%] Determine a expressão do vetor campo elétrico $\vec{\mathbf{E}}$. (**b**)[30%] Determine a expressão do vetor campo magnético $\vec{\mathbf{B}}$. (**c**)[30%] Responda qual deve ser a relação entre $\omega$ e $\kappa$ para que as equações de Maxwell estejam satisfeitas.

10) (Valor: 2,0) Numa onda plana monocromática, o campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E_0}\left[\mathrm{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})} + \mathrm{e}^{i(\omega t + \boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})}\right]\,,$$

em que $\mathbf{E_0}$ é um vetor real, uniforme e constante. Usando $\boldsymbol{\kappa} = \kappa\hat{\mathbf{k}}$,

(**a**)[40%] mostre que o vetor campo magnético associado à onda é dado por

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = n\sqrt{\epsilon\mu}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E_0}\left[\mathrm{e}^{i(\omega t - \boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})} + \mathrm{e}^{i(\omega t + \boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})}\right]\,.$$

(**b**)[30%] mostre que o vetor de Poynting é

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\epsilon/\mu}E_0^2\sin(2\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{r})\sin(2\omega t)\hat{\mathbf{k}}\,.$$

(**c**)[30%] e encontre o valor médio do vetor de Poynting $\langle\mathbf{S}\rangle$, utilizando a expressão

$$\langle\mathbf{S}\rangle \equiv \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)\,,$$

em que $\mathbf{H}^*$ é o conjugado complexo de $\mathbf{H}$. Discuta fisicamente o resultado.