FÍSICA MÉDICA

Área de Ciências Naturais e Tecnológicas – Curso de Física Médica

FSC121–Eletromagnetismo II

Turma 3839 – 2° semestre de 2006 (28/novembro)

Professor: Gilberto Orengo – orengo@unifra.br (http://www.orengonline.com)

NOME DO ALUNO:	NOTA:

PROVA 2(2)

Valor: 10,0 – Peso: 1.0

As equações de Maxwell, na forma diferencial, são:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial\vec{\mathbf{D}}}{\partial t}\,, \tag{1}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial\vec{\mathbf{B}}}{\partial t}\,, \tag{2}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{D}} = \rho\,, \tag{3}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\mathbf{B}} = 0\,, \tag{4}$$

com as seguintes equações constitutivas:

$$\vec{\mathbf{D}} = \vec{\mathbf{D}}(\vec{\mathbf{E}}) = \varepsilon\vec{\mathbf{E}} \quad \text{(meio linear e não dispersivo)}\,, \qquad \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{H}}(\vec{\mathbf{B}}) = \frac{1}{\mu}\vec{\mathbf{B}} \quad \text{(meio linear e não dispersivo)}\,,$$

$$\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}(\vec{\mathbf{E}}) = g\vec{\mathbf{E}}\,, \qquad \vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}}\times\vec{\mathbf{B}})\,.$$

1) (Valor: 2,0)(**a**)[50%] Mostre que as equações de onda para um meio linear são:

$$\nabla^2\vec{\mathbf{H}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathbf{H}}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{\mathbf{H}}}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

e

$$\nabla^2\vec{\mathbf{E}} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{\mathbf{E}}}{\partial t^2} - g\mu\frac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t} = 0 \quad \text{(para um meio que } \rho = 0)\,, \tag{6}$$

em que ϵ é a permissividade elétrica do meio, μ é a permeabilidade magnética do meio e g é a condutividade elétrica do meio. (Identidade necessária: $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times = \vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot - \nabla^2$) (**b**)[50%] Considerando que a dependência temporal do campo elétrico seja dada por $e^{-i\omega t}$, a solução para essa equação de onda monocromática é

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}})e^{-i\omega t}\,.$$

Use esta solução para obter a equação de onda que rege a variação espacial do campo elétrico e discuta suas possíveis soluções.

2) (Valor: 2,0)(**a**)[30%] Usando as Equações de Maxwell para o caso que não há carga prescrita e ainda, que a condutividade é nula ($g = 0$), obtenha

$$K\vec{\kappa}\cdot\hat{\vec{\mathbf{E}}} = 0\,,$$

$$\vec{\kappa}\cdot\hat{\vec{\mathbf{B}}} = 0\,,$$

$$\vec{\kappa}\times\hat{\vec{\mathbf{E}}} = \omega\hat{\vec{\mathbf{B}}}\,,$$

$$\vec{\kappa}\times\hat{\vec{\mathbf{B}}} = -\frac{\omega}{c^2}K\hat{\vec{\mathbf{E}}}\,,$$

nas quais o acento circunflexo (ˆ) indica vetor complexo, $\vec{\kappa} = \kappa\hat{\mathbf{u}}$. (**b**)[40%] Obtenha os operadores $\partial/\partial t$ e $\vec{\nabla}$ em função, respectivamente, de ω e $\vec{\kappa}$. Será necessário supor que $\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}, t) = \hat{\vec{\mathbf{E}}}e^{-i(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{\mathbf{r}})}$. Ajuda: $\hat{\vec{\mathbf{D}}} = \epsilon\hat{\vec{\mathbf{E}}}$, $\hat{\vec{\mathbf{B}}} = \mu\hat{\vec{\mathbf{H}}}$, $\epsilon = K\epsilon_0$ e $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$.)

(**c**)[30%] Use as equações acima (do item (**a**)) para demonstrar que a onda eletromagnética é ***transversal*** e, também, que $\hat{\mathbf{E}}$ e $\hat{\mathbf{B}}$ são perpendiculares entre si.

3) (Valor: 2,0)[100%] **Aquela questão!!!** Mostre que o vetor de Poynting para uma onda com polarização circular pode ser escrito como

$$\vec{\mathbf{S}} = u\vec{\mathbf{v}}_p\,,$$

em que u é a densidade de energia e $\vec{\mathbf{v}}_p$ é a velocidade de fase da onda eletromagnética. É importante obter as expressões para a densidade de energia u e para o vetor de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$, antes de apresentar a solução pedida. Lembre-se que partimos de $E_x = E_0\cos(\omega t - \kappa z)$ e $E_y = \pm E_0\sin(\omega t - \kappa z)$.

4) (Valor: 2,0)[100%] **Para pensar!!!** Considere um resistor cilíndrico localizado no eixo z (obviamente perpendicular ao plano $x - y$) percorrido por uma corrente elétrica I. A densidade de corrente e o campo elétrico são, respectivamente, $\vec{\mathbf{J}} = -J_0\hat{\mathbf{k}}$ e $\vec{\mathbf{E}} = -E_0\hat{\mathbf{k}}$, sendo J_0 e E_0 constantes. Baseado nos conceitos estudados indique o sentido do vetor de Poynting ($\vec{\mathbf{S}}$). Para refrescar a memória e ajudá-lo, o campo elétrico gerado por uma fonte não se localiza somente no interior de um condutor, mas também em suas vizinhanças. (***Importante:*** *utilize os eixos (x, y, z) e os seus planos para indicar o sentido de $\vec{\mathbf{S}}$. Por exemplo, o sentido de $\vec{\mathbf{S}}$ é perpendicular ao plano xy no sentido de $\hat{\mathbf{k}}$ positivo; ou, o sentido de $\vec{\mathbf{S}}$ é radial e está no plano $x - y$ afastando-se do condutor (resistor)*. Ou ainda, desenhe a situação de forma clara.)

5) (Valor: 2,0) Considere duas ondas planas que se propagam em sentidos opostos e que ambas as ondas estejam polarizadas com $\vec{\mathbf{E}}$ na direção y. Assim, o valor instantâneo de $\vec{\mathbf{E}}$ é dado por

$$\vec{\mathbf{E}} = E_0\sin(\omega t + \kappa x)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + E_1\sin(\omega t - \kappa x)\hat{\boldsymbol{\jmath}}\,.$$

(**a**)[50%] Encontre o valor instantâneo de $\vec{\mathbf{H}}$ e (**b**)[50%] Encontre o vetor de Poynting $\vec{\mathbf{S}}$.