Publicação Interna: *série ELETROMAGNETISMO* , **Vol.1 (1)**, pp.1–3, **Setembro/2007**

UNIFRA Centro Universitário Franciscano (Fone: (55)220-1200 – FAX: (55)222-6484)
Rua dos Andradas, 1614 (CEP: 97010-032 – Santa Maria/RS/Brasil)
Área de Ciências Naturais e Tecnológicas (Curso de Física Médica)

ASSUNTO: 1(1) 2007

AS EQUAÇÕES DO CAMPO MAGNÉTICO NOS MEIOS MATERIAIS (MAGNÉTICOS)

GILBERTO ORENGO

orengo@unifra.br

1. AS EQUAÇÕES DO CAMPO MAGNÉTICO NOS MEIOS MATERIAIS (MAGNÉTICOS)[1]

Nos limitaremos em considerar situações estacionárias, nas quais as densidades de carga e de corrente e, portanto, os campos são constantes no tempo. Nestas condições as equações que descrevem o campo magnético são,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}\,, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0\,. \tag{2}$$

Elas são válidas no vácuo e em meios materiais; e neste último caso existem, como já vimos, outras correntes de condução – correntes microscópicas, superficiais ou volumétricas, que fogem do nosso controle direto. É portanto, conveniente separar a densidade de corrente $\mathbf{J}$ em duas partes: uma parte descreverá as correntes de condução, aquela que controlamos e que indicaremos por $\mathbf{J}_{\rm c}$, e uma outra parte será a corrente $\mathbf{J}_{\rm m}$ devido a magnetização do material:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\rm c} + \mathbf{J}_{\rm m} = \mathbf{J}_{\rm c} + \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}\,. \tag{3}$$

Se observa que se estivessemos lidando com condições dinâmicas deveríamos considerar também uma segunda contribuição de corrente microscópica, que é devido ao movimento das cargas de polarização. Retornaremos neste assunto mais adiante. Agora inserimos essa expressão no segundo membro da Eq. (1):

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_{\rm c} + \mu_0 \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}$$

e deslocando o rotacional de $\mathbf{M}$ para o primeiro membro

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{B}/\mu_0 - \mathbf{M}) = \mathbf{J}_{\rm c}\,.$$

Como se observa é cômodo definir o vetor auxiliar $\mathbf{H}$, conhecido como *campo magnetizante ou vetor intensidade magnética*[2]

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\,. \tag{4}$$

As equações para o campo magnético ficam

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\rm c}\,, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0\,. \tag{6}$$

---

[1] Texto extraído do livo: BETTINI, ALESSANDRO. **Elettromagnetismo**. Padova: Zanichelli editore, 2000. (Texto em italiano).

[2] Quanto a denominação desta nova grandeza há divergências na literatura. A mais utilizada é *vetor intensidade magnética* ou *simplesmente intensidade magnética*. A denominação *campo magnetizante* é usada no livro do qual este texto foi extraído.

Nesta forma, obviamente equivalente as precedentes, as equações aparentam serem mais simples; naturalmente a complicação existe ainda, só que agora escondida na definição de $\mathbf{H}$. Como indica da Eq.(4), as unidades de medida de H são as mesmas de M, isto é, Ampère/metro (A/m).

Observamos que o campo $\mathbf{H}$ é determinado *somente pela corrente macroscópica* $\mathrm{J_c}$. Isto é muito útil porque é esta grandeza física que controlamos, produzindo com geradores, e medindo-se com amperímetro, etc. Nos encontramos numa situação análoga aquela na qual, no estudo dos dielétricos, introduzimos o vetor $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ os quais surgem somente de cargas elétricas livres. Na prática, enquanto o vetor deslocamento elétrico $\mathbf{D}$ não é muito útil, a intensidade magnética $\mathbf{H}$ o é. Em eletrostática, de fato, não são em geral as cargas em um condutor (se pensa por fixar a idéia sobre uma armadura de um capacitor) que controlamos, mas sim o potencial e o campo elétrico, que é, de qualquer forma, sempre (mesmo que seja ou não o dielétrico) o oposto do potencial e é, portanto, $\mathbf{E}$ e não $\mathbf{D}$ que controlamos diretamente em cada caso; por exemplo, em um capacitor plano o campo elétrico é V/d (em que V é a diferença de potencial, e d é a distância entre as armaduras). No caso do magnetismo, ao contrário, controlamos a corrente elétrica de condução e portanto obtemos diretamente $\mathbf{H}$ e não $\mathbf{B}$.

Retornando as equações (5) e (6) observamos que, de costume, podemos escrevê-las também na forma integral: a (6) afirma que o fluxo de $\mathbf{B}$ saindo de uma superfície fechada é nulo, e a (5) que a circuitação (ou circulação) de $\mathbf{H}$ ao longo de uma linha fechada qualquer Γ é igual a corrente macroscópica I_c associada (concatenada) a ela:

$$\oint_\Gamma \mathbf{H}\cdot d\mathbf{s} = I_c\,. \tag{7}$$

A equação encontrada não serve para nada até estabelecermos uma relação entre $\mathbf{B}$ e a magnetização $\mathbf{M}$. Tal relação para os materiais não ferromagnéticos é, com boa aproximação, linear. Isto implica pela equação (4) que também a relação entre $\mathbf{H}$ e $\mathbf{M}$ seja linear. Por razões históricas é desta última relação que partimos, escrevendo

$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H}\,. \tag{8}$$

A constante adimensional χ_m recebe o nome *susceptibilidade magnética*. Repetimos que a eqauação (8) é válida para materiais diamagnéticos e paramagnéticos, mas não para os ferromagnéticos. Como veremos, para as duas primeiras duas classes de materiais χ_m é sempre muito pequeno, isto é $|\chi_m| << 1,0$, e a magnetização é assim pequena. Recordando, as magnetizações induzidas no mesmo sentido do campo são as paramagnéticas e, em sentido oposto são as diamagnéticas, portanto, concluimos que χ_m tem sinal positivo para o primeiro caso e negativo para o segundo.

Tendo em conta da equação (4) podemos exprimir $\mathbf{B}$ em termos de $\mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M}) = \mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H} = \kappa\mu_0\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}\,, \tag{9}$$

no qual introduzimos as constantes

$$\kappa = 1+\chi_m\,, \tag{10}$$

que se chama *permeabilidade magnética do meio relativa ao vácuo* e

$$\mu = \kappa\mu_0 = \mu_0(1+\chi_m)\,, \tag{11}$$

chamada de *permeabilidade magnética absoluta*. A relação de proporcionalidade (8) entre m e H implica uma relação de proporcionalidade entre M e B. Tendo em conta (9) temos de fato

$$\mathbf{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1+\chi_m)}\mathbf{B}\,. \tag{12}$$

Esta e não a expressão (8) deve de fato ser a relação da qual parte o nosso raciocínio, já que $\mathbf{B}$ é o campo fundamental e $\mathbf{H}$ um campo auxiliar. É importante lembrar que um feixe de partículas carregadas que atravessa o material é defletido pela ação de $\mathbf{B}$, transmitindo uma força de Lorentz, e não pela ação de $\mathbf{H}$. É oportuno definir de maneira simples a constante de proporcionalidade de (12) e não aquela de (8), por exemplo, fazendo

$$\mathbf{M} = \frac{\chi'_m}{\mu_0}\mathbf{B}\,. \tag{13}$$

A razão deste procedimento é histórico; pois se acreditava que de fato um tempo atrás que fosse $\mathbf{H}$ o campo fundamental. Na prática, porém, para materiais não ferromagnéticos, que aqui estamos considerando, essa dificuldade não é essencial, dado que $|\chi_m| << 1,0$, e segue que

$$\chi'_m = \frac{\chi_m}{1+\chi_m} \approx \chi_m\,. \tag{14}$$

Portanto, neste caso as duas constantes substancialmente coincidem. Mas isto não verdade para materiais ferromagnéticos.