8.4. Indução Magnética: condutor que se move em um campo magnético[1]

Vimos anteriormente que a força eletromotriz induzida $\mathcal{E}$ (FEMI *ou simplesmente* FEM) é obtida pelas seguintes expressões

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{E} = -\frac{\partial \phi_m}{\partial t}\,,$$

em que:

$$\phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds,\ \text{é o fluxo magnético} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds\,,$$

e que nos levam a equação de Faraday:

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_S \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) \cdot \hat{\mathbf{n}}\, ds \quad (\text{Forma integral})\,, \tag{8.4.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Forma diferencial})\,. \tag{8.4.2}$$

Relembrando, a força $\mathbf{F}$ sobre uma partícula de carga elétrica e que se move com velocidade $\mathbf{v}$ num campo magnético $\mathbf{B}$ é

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,. \tag{8.4.3}$$

Suponhamos que a partícula carregada esteja situada num fio que se movimenta com uma velocidade $\mathbf{v}$ através de um campo magnético $\mathbf{B}$, como sugere a figura 8.4.1. Dividindo (8.4.3) por e, obtemos a força por carga ou campo elétrico $\mathbf{E}$[2], isto é,

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{e} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}\,. \tag{8.4.4}$$

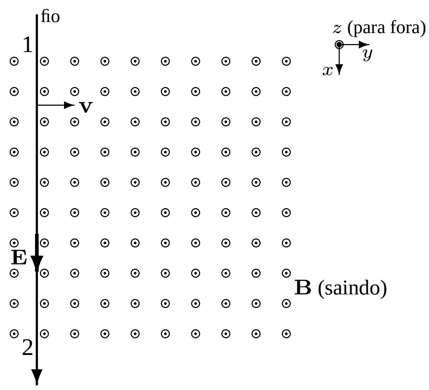

Figura 8.4.1 Uma FEM é induzida num fio que se move através de um campo magnético.

O valor de $\mathbf{E}$ é dado por $E = vB\sin\theta$, em que θ é o ângulo entre $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$. O campo elétrico $\mathbf{E}$ é do tipo que produz FEM e é normal ao plano que contém $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$. Por exemplo, na figura 8.4.1, $\mathbf{v}$ está na direção positiva y, e $\mathbf{B}$ está na direção positiva z. Por isso, $\mathbf{v}$ atravessando $\mathbf{B}$ produz $\mathbf{E}$ na direção positiva x ou ao longo do fio.[3] A FEM $\mathcal{E}$ induzida entre dois pontos 1 e 2 sobre o fio é então

$$\mathcal{E} = \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}\,, \tag{8.4.5}$$

em que $\mathcal{E}$ é a FEM induzida sobre um comprimento l do fio (em V), $\mathbf{E}$ é o campo elétrico (em Vm^{-1}), $d\mathbf{l}$ é o elemento de comprimento do fio (em m), $\mathbf{v}$ é a velocidade do fio (em ms^{-1}) e $\mathbf{B}$ é o campo magnético (em T).

[1] Texto adaptado do livro da referência 2.

[2] Para este caso relativo a movimento, $\mathbf{E}$ deveria ser impresso de outra forma (por exemplo, $\mathbf{E}_e$) para diferençar do $\mathbf{E}$ no caso estacionário ($\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$), mas por simplificação não faremos distinção.

[3] Supõe-se que a condutividade do fio é finita de modo que a componente de $\mathbf{E}$ tangente ao fio não precisa ser zero.

Num fio reto no qual $\mathbf{v}$, $\mathbf{B}$ e o fio são perpendiculares entre si, $\mathbf{B}$ é uniforme e $\mathbf{v}$ é o mesmo em todas as partes do fio; a equação 8.4.5 reduz-se a

$$\mathcal{E} = El = vBl\,, \tag{8.4.6}$$

em que l é o comprimento do fio em metros.

As relações podem ser usadas para se achar a FEM induzida em qualquer parte de um circuito, devido ao seu movimento através de um campo magnético. Podem também ser empregadas para se achar a FEM total induzida num circuito fechado movido ou deformado num campo magnético que não varia com o tempo. Num circuito fechado, a equação 8.4.5 torna-se

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{l}\,, \tag{8.4.7}$$

em que $\mathcal{E}$ é a FEM total induzida no circuito.

EXERCÍCIOS

1. Consideremos a espira retangular fixa de área A mostrada na figura 8.4.2. O campo magnético $\mathbf{B}$ é normal ao plano da espira (para fora na figura) e é uniforme sobre toda a área da espira. Todavia, a grandeza de $\mathbf{B}$ varia harmonicamente com o tempo, sendo dada por

$$B = B_0\cos(\omega t)\,,$$

em que B_0 é a amplitude máxima de B (em T), ω é a frequência angular , (em rad s^{-1}, e $\omega = 2\pi f$, em que f= frequência) e t é o tempo (em s). Achar a FEM total induzida na espira. (*Resposta:* $\mathcal{E} = A\omega B_0\sin(\omega t)$.)

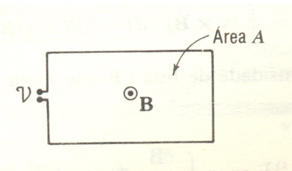

Figura 8.4.2 Espira fixa de área A (*Obs.: na figura* $\nu \equiv \mathcal{E}$).

2. Consideremos a espira retangular mostrada na figura 8.4.3. A largura l da espira é constante, mas o comprimento x aumenta uniformemente com o tempo, quando se move o condutor deslizante a uma velocidade uniforme $\mathbf{v}$. O campo magnético $\mathbf{B}$ é em toda parte o mesmo (normal ao plano da espira) e é constante com relação ao tempo. Achar a FEM total induzida na espira. (*Resposta:* $\mathcal{E} = vBl$.)

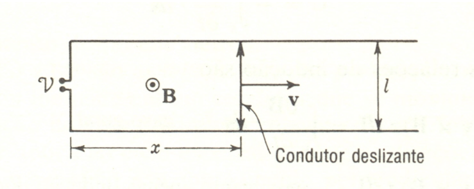

Figura 8.4.3 Condutor deslizante para aumentar a área da espira (*Obs.: na figura* $\nu \equiv \mathcal{E}$).

3. Consideremos outra vez a espira com condutor deslizante discutida no exercício 2 (figura 8.4.3). O campo magnético $\mathbf{B}$ é normal ao plano da espira e é uniforme em toda parte. O condutor deslizante move-se com uma velocidade uniforme $\mathbf{v}$. estas condições são as mesmas do exercício anterior. Neste caso, porém, vamos imaginar que o campo magnético $\mathbf{B}$ varia harmonicamente com o tempo, dado por

$$B = B_0\cos(\omega t)\,.$$

Achar a FEM total induzida na espira.(*Resposta:* $\mathcal{E} = B_0 l\sqrt{v^2+(\omega x)^2}\sin(\omega t+\delta)$, em que $\delta = \mathrm{arctg}(v/\omega x)$ e x é o comprimento instantâneo da espira.)

4. O circuito de uma espira retangular de largura l e comprimento x_1 é completado por contatos que deslizam sobre uma tira condutora fina, como sugere a figura 8.4.4. A espira é estacionária, mas a tira corre longitudinalmente com uma velocidade uniforme $\mathbf{v}$. O campo magnético $\mathbf{B}$ é normal à tira e ao plano da espira. $\mathbf{B}$ é constante com relação ao tempo e é uniforme em toda parte. A largura da tira é l, igual à da espira, embora esta, para maior clareza, seja mostrada com uma largura ligeiramente maior na figura 8.4.4. Achar a FEM total induzida no circuito. (*Resposta:* $\mathcal{E} = vBl$.)

5. Consideremos agora as mesmas espiras e tira do exercício precedente (Fig. 8.4.4), mas suponhamos que o campo magnético $\mathbf{B}$ varia harmonicamente com o tempo, dado por

$$B = B_0 \cos(\omega t) \,.$$

Achar a FEM total induzida na espira. (*Resposta:* $\mathcal{E} = B_0 l \sqrt{v^2 + (\omega x_1)^2} \sin(\omega t + \delta)$, em que $\delta = \mathrm{arctg}(v/\omega x_1)$.)

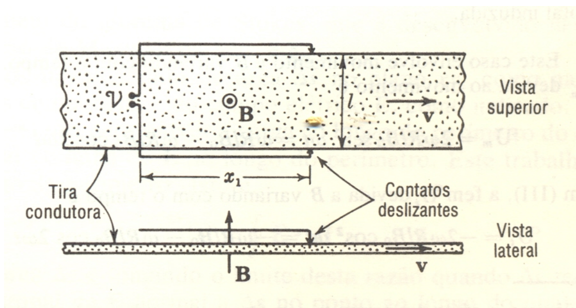

Figura 8.4.4 Espira fixa com tira deslizante para aumentar a área da espira (Exercícios 4 e 5. *Obs.: na figura* $\nu \equiv \mathcal{E}$).

6. Consideremos em seguida uma espira retangular rotativa num campo magnético estacionário como na figura 8.4.5(a). A espira gira com uma velocidade angular uniforme de ω radianos por segundo. Este arranjo representa um gerador simples de C.A. (Corrente Alternada); a FEM induzida aparece nos terminais ligados aos anéis coletores. Sendo R o raio da espira e l o comprimento, achar a FEM total induzida.(*Resposta:* $\mathcal{E} = \omega BA \sin(\omega t)$, em que $2Rl = A$.)

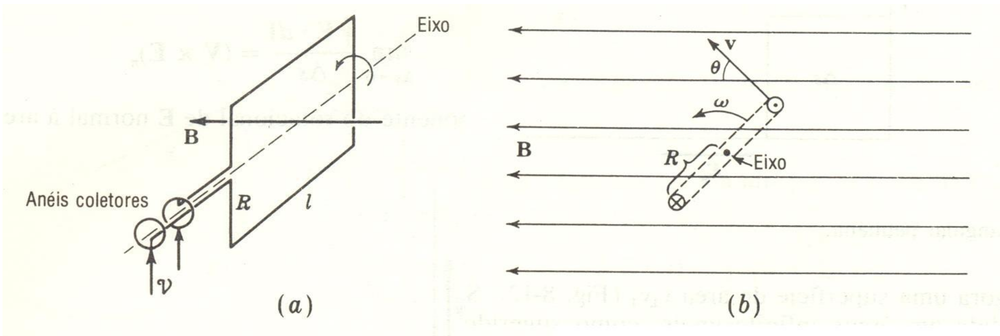

Figura 8.4.5 Gerador de C.A.: (a) vista em perspectiva; (b) seção transversal perpendicular ao eixo. (para os exercícios 6 e 7. *Obs.: na figura* $\nu \equiv \mathcal{E}$)

7. Finalmente consideremos a mesma espira rotativa do exercício anterior com a seguinte modificação: B varia com o tempo dado por $B = B_0 \sin(\omega t)$ (ω igual à velocidade angular de rotação). Quando $t = 0$, vemos que $B = 0$ e $\theta = 0$ (Fig. 8.4.5(b)). Achar a FEM total induzida.(*Resposta:* $\mathcal{E} = \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_t = -2\omega Rl B_0 \cos(2\omega t)$, em que $\mathcal{E}_m$ é a FEM devido ao movimento e $\mathcal{E}_t$ é a FEM devido a variação no tempo.)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BETTINI, A. *Elettromagnetismo*. Bologna: Decibel editrice – Zanichelli editore, 2000.

[2] KRAUS, J. D.; CRAVER, K. R. *Eletromagnetismo*. 2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Guanabara Dois, 1978.

[3] TIPLER, P. *Física - volume 3: Eletricidade e Magnetismo*. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos Científicos, 1995.

[4] PURCELL, E. M. *Curso de Berkeley: Eletricidade e Magnetismo*. São Paulo, SP: Editora Edgard Blücher Ltda., 1973.

[5] MACHADO, K. D. Teoria do eletromagnetismo. In: ____. Ponta Grossa, PR: Editora UEPG, 2000. v. 1.

[6] REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. *Fundamentos da Teoria Eletromagnética*. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus Ltda., 1988.

[7] QUEVEDO, C. P. *Eletromagnetismo*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1977.

[8] MACHADO, K. D. Teoria do eletromagnetismo. In: ____. Ponta Grossa, PR: Editora UEPG, 2002. v. 2.